

1. La matematica e le difficoltà di apprendimento

Le fasi iniziali e intuitive di apprendimento della matematica sono denominate da Ginsburg “informali”¹. Un bambino acquisisce i termini relativi alla grandezza (più, meno; maggiore, minore) e all’equivalenza (uguale a) a casa, molto prima di frequentare la scuola. La sequenza dei numeri viene imparata da un bambino nello stesso modo in cui impara a recitare l’alfabeto prima di sapere come si usa. La matematica informale consiste nell’abilità di incastrare oggetti fra di loro, solo successivamente, durante i primi anni di scolarizzazione, il bambino si rende conto del concetto di numerosità, ossia del riconoscimento, ad esempio, che quattro oggetti, di qualunque dimensione, comunque distribuiti e in qualunque configurazione, sono sempre in numero di quattro. Questa realizzazione, detta di “conservazione” del numero, sta a significare la crescente abilità del bambino ad usare simboli numerici con un significato reale.

L’apprendimento della matematica in modo informale nelle prime fasi della scolarizzazione avviene attraverso la manipolazione di oggetti, seguita in un secondo momento da procedure più astratte e formali. Molti bambini non comprendono questo passaggio e considerano la matematica un insieme di fatti sconnessi fra loro da imparare a memoria. In alcuni casi gli adulti insistono prematuramente su bambini dotati nella memorizzazione insegnandogli procedure che questi ultimi sono in grado di imitare ma che non sono tuttavia in grado di comprendere. Benché questa differenza tra abilità informale e formale non costituisca in senso stretto un disturbo di apprendimento, costituisce probabilmente un fattore nella maggior parte delle difficoltà di apprendimento della matematica.

Il passaggio per i bambini dall’aritmetica informale a quella formale è molto più graduale di quanto la maggior parte dei genitori o educatori pensino. Anche gli apprendenti adulti necessitano di un lasso di tempo significativo per il passaggio dalla dimensione reale e concreta di un nuovo apprendimento ad una generalizzazione o astrazione².

¹H.P. Ginsburg & Seo Kyoung-Hye, *Mathematics in Children's Thinking*, in *Mathematical Thinking and Learning*, Taylor&Francis online, 1999

²C. Christina Wright: *Learning disabilities in mathematics*, 1996 in <http://www.ldonline.org/article/5947>

Le difficoltà di apprendimento della matematica, come le difficoltà nella lettura, si manifestano in modi diversi e possono essere o meno associate tra loro. A volte i bambini con handicap del linguaggio hanno difficoltà ad organizzare e gerarchizzare idee di “piccolo” e di “grande”. Con molta probabilità vedranno la matematica come un insieme senza significato di fatti e procedure da memorizzare. Le difficoltà nella comprensione della matematica possono derivare dalla difficoltà di elaborazione del linguaggio, essere legate a difficoltà nella percezione visuale e spaziale, a difficoltà di memorizzazione di fatti matematici, a difficoltà nell’assimilare procedure nell’ordine corretto oppure derivare da blocchi emozionali tali da impedire alle persone interessate di approcciare in modo efficace la materia.³

Per gli alunni con disturbi specifici di apprendimento viene considerato essenziale che insegnanti e terapisti guidino l’apprendente che impara concetti matematici in qualunque grado di istruzione lungo i seguenti stadi di sviluppo cognitivo: concreto, pittorico, simbolico e astratto⁴. Il primo stadio è costituito dal lavoro e la sperimentazione su materiale concreto. Quello pittorico è dato dalla rappresentazione grafica del materiale concreto manipolato nello stadio precedente. I simboli come numeri e segni matematici sono introdotti nello stadio successivo una volta che l’individuo abbia compreso il concetto di base, per consentirgli di eseguire procedure. Nello stadio astratto l’apprendente è in grado di riflettere su determinati concetti e di risolvere problemi anche senza utilizzare gli strumenti dei tre stadi precedenti.

Il lavoro in piccoli gruppi per la risoluzione di problemi si rivela più efficace rispetto al lavoro individuale, così come l’approccio basato sul problem solving permette di mettere in risalto le abilità e i punti di forza degli apprendenti. Nella sezione che segue si presenta un metodo per affrontare la matematica basato sul problem solving e la rappresentazione grafica, il metodo Singapore, che per le sue caratteristiche ha avuto una grande diffusione nel mondo ed è idoneo a costituire un ausilio all’apprendimento della matematica per gli alunni con disturbi specifici di apprendimento.

³ C. Christina Wright: *Learning disabilities in mathematics*, 1996 in <http://www.ldonline.org/article/5947>

⁴ Mathematics and Dyslexia: Perspectives, Fall 1998 International Dyslexia Association, in http://www.resourceroom.net/math/lda_math_fall98.html

2. Il metodo Singapore. Origini, fondamento pedagogico e caratteristiche

Singapore è da tempo costantemente ai vertici nell'insegnamento della matematica secondo gli indicatori internazionali. Nella consapevolezza della scarsità delle proprie risorse naturali e della necessità di capitale umano altamente qualificato, ha sviluppato un approccio altamente efficiente all'insegnamento della matematica in base alla ricerca effettuata e ai risultati ottenuti⁵. La padronanza della matematica per gli studenti viene costruita senza il ricorso all'apprendimento mnemonico di formule. Utilizza concetti nuovi che si fondano sull'approccio dello psicologo cognitivo americano Jerome Bruner delle tre fasi pittorica, concreta e astratta, ed incoraggia il problem solving e la comunicazione. Insegna ad adottare strategie per risolvere problemi basate sulle rappresentazioni grafiche come il disegno di barre.



L'efficacia di questo approccio è dimostrata dal posizionamento di Singapore ai vertici nell'insegnamento della matematica secondo gli indicatori dello IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement)⁶ e il perché sia attualmente adottato da oltre 40 paesi nel mondo inclusi il Regno Unito e gli Stati Uniti.

Bruner ha proposto tre modi di rappresentazione dei problemi: quello concreto o basato sull'azione (rappresentazione attiva), quello pittorico o basato sulle immagini (o rappresentazione iconica) e quello astratto o basato sul linguaggio (rappresentazione

⁵ Bill Jackson: *Philosophy and Pedagogical Approach of Singapore Math*, in <http://www.thedailyriff.com/2010/09/singapore-math-demystified-part-2-philosophy.php>

⁶ What is Singapore Maths? in <https://mathsnoproblem.com/en/the-maths/what-is-singapore-maths/> 2018

simbolica). A partire dalla sua ricerca Bruner ha proposto il curricolo a spirale: un approccio all'insegnamento in cui ogni argomento o area di conoscenza è rivisitato periodicamente a livelli via via più sofisticati. Con questa tecnica a spirale la materia è presentata in una sequenza logica. Inizialmente un concetto è rappresentato con "materiali" concreti, successivamente con modelli, ossia figure ed in seguito con notazioni astratte come i segni di maggiore, minore o uguale⁷.

Nella teoria dei *processi mediatori* di E. Damiano⁸ l'azione didattica svolge la funzione di mediazione tra l'apprendente e l'oggetto dell'apprendimento e si avvale dei "mediatori didattici", ossia rappresentazioni della realtà classificati secondo la loro distanza dalla realtà concreta. Quelli più vicini sono i mediatori attivi, ovvero l'esperienza diretta, gli oggetti concreti e la percezione fisica di essi. Seguono i mediatori iconici, che utilizzano il linguaggio grafico e rappresentano la realtà mediante disegni, carte geografiche, modellini e plastici, ma anche suoni e filmati. Il terzo tipo di mediatore in ordine di distanza dalla realtà è quello analogico, costituito dai giochi di simulazione, drammatizzazioni, role play, in cui gli alunni sperimentano e apprendono assumendo ruoli simili a quelli del mondo reale. Vi sono infine i mediatori simbolici, ossia lettere, numeri e altri simboli per rappresentare variabili e le relazioni che le legano. Sono i mediatori più usati per la loro capacità di astrazione e di generalizzazione ma possono risultare di difficile comprensione poiché presuppongono una decodificazione⁹.

La centralità del problem solving nel metodo Singapore è espressa nei programmi ministeriali di matematica dei diversi ordini di scuola di quel paese in cui, nella sezione "quadro di riferimento" della materia viene individuato come il principale obiettivo dell'insegnamento della matematica e ne vengono esplicitati i 5 punti chiave: i concetti matematici, le abilità, i processi, l'approccio e la metacognizione¹⁰.

I primi sono raggruppati in numerici, algebrici, geometrici, statistici, probabilistici e analitici, tra loro connessi, interdipendenti e variamente presenti e approfonditi nei diversi

⁷ What is Singapore Maths? in <https://mathsnoproblem.com/en/the-maths/what-is-singapore-maths/> 2018

⁸ E. Damiano, *l'azione didattica. Per una teoria dell'insegnamento*, Armando, Roma, 1999

⁹ Ljuba Pezzimenti: *mediatori didattici*, in

<http://lascuola.it/nuovadidattica/it/home/mappe/1382696387986/1390908054991>

¹⁰ Ministry of Education Singapore, *Mathematics Syllabus Primary One to Five*, 2012

gradi di insegnamento. Per sviluppare una conoscenza approfondita dei concetti matematici, delle connessioni tra di loro e delle loro applicazioni, vengono raccomandate per gli alunni esperienze di apprendimento che includano attività pratiche e l'uso di ausili tecnologici per favorire l'associazione dei concetti matematici astratti con le esperienze concrete. Ai concetti matematici menzionati corrispondono le abilità che si intende sviluppare negli alunni, ossia il calcolo numerico, l'utilizzo delle formule algebriche, l'analisi di dati, le misurazioni, l'uso di strumenti matematici e le stime. A queste si aggiungono l'uso dei fogli di calcolo e di altri software per la matematica. I processi includono le applicazioni e le modellizzazioni, finalizzati alla connessione della matematica appresa al mondo reale e all'incremento delle competenze nella materia. Una componente dell'approccio alla matematica basato sul problem solving è la metacognizione, ossia la capacità dell'apprendente di usare in modo strategico il proprio pensiero e le proprie risorse monitorando e autoregolando il proprio apprendimento man mano che questo si sviluppa. Infine, nell'approccio generale alla materia vengono incoraggiati la convinzione dell'utilità della matematica, l'interesse ed il piacere nel suo apprendimento, l'apprezzamento della sua bellezza, la sicurezza nel suo utilizzo e la perseveranza nella soluzione di problemi.

Il metodo Singapore è detto anche metodo a barre e, come detto, si fonda sull'approccio concreto, pittorico, astratto sviluppato da Jerome Bruner. Le rappresentazioni grafiche di cui si avvale corrispondono alla fase pittorica dell'approccio menzionato, in preparazione della fase astratta o in sostituzione di questa. La fase astratta o simbolica dell'apprendimento viene raggiunta solamente in seguito ad una conoscenza solida delle fasi concreta e pittorica¹¹.

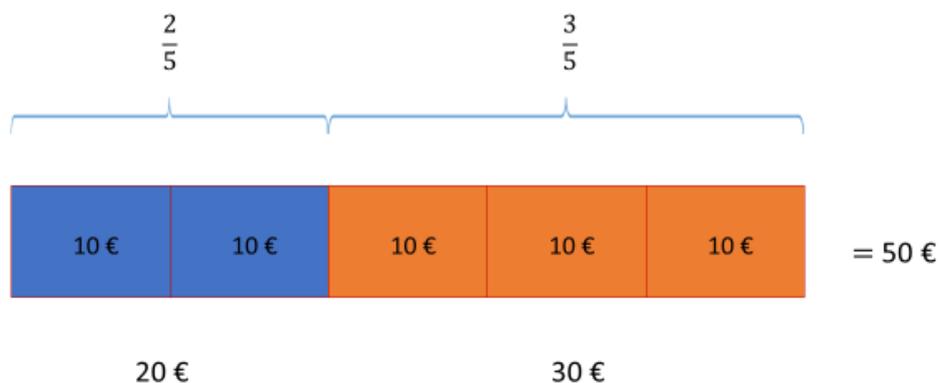
Da un lato il metodo a barre fornisce agli alunni un efficace strumento per risolvere problemi espressi a parole. Tuttavia, il maggiore vantaggio del metodo consiste nella possibilità per gli alunni, una volta acquisite la padronanza, di usare facilmente modelli a barre per affrontare anno dopo anno diversi argomenti di matematica. Risulta essere infatti un'ottima tecnica, sebbene non l'unica, per risolvere proporzioni, problemi di volumi, frazioni, percentuali, problemi di primo grado, sistemi di equazioni.

¹¹ Concrete pictorial abstract in <https://mathsnoproblem.com/en/the-maths/teaching-methods/concrete-pictorial-abstract/>

Più significativamente, il metodo a barre può condurre lo studente alla padronanza di formule complesse come quelle algebriche in maniera intuitiva e sostanziale: anziché semplicemente seguire lo sviluppo di una qualsiasi formula, l'alunno acquista una effettiva comprensione di cosa accade nell'applicazione e nell'utilizzo della formula stessa. Unito ad altre strategie di approccio a concetti astratti il metodo a barre fornisce all'alunno gli strumenti per ottenere risultati positivi in matematica a lungo termine.

3. Esempi di rappresentazioni di problemi con il metodo Singapore.

- Luca ha speso $\frac{2}{5}$ dei suoi risparmi per comprare un libro di racconti. Il libro di racconti è costato 20 €. A quanto ammontavano i suoi risparmi prima dell'acquisto?



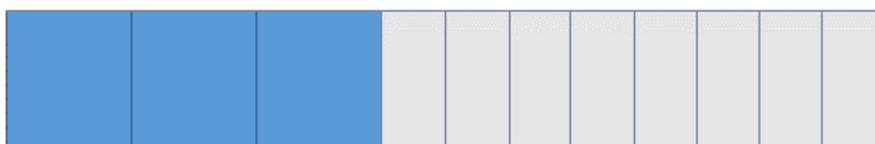
I risparmi di Luca ammontavano a **50 €**

- La signora Rossi ha preparato delle torte. Ne ha venduti i $\frac{3}{7}$ la mattina e i $\frac{3}{8}$ delle rimanenti nel pomeriggio. Sapendo che la mattina ha venduto 90 torte in più rispetto al pomeriggio, quante torte ha preparato in totale?

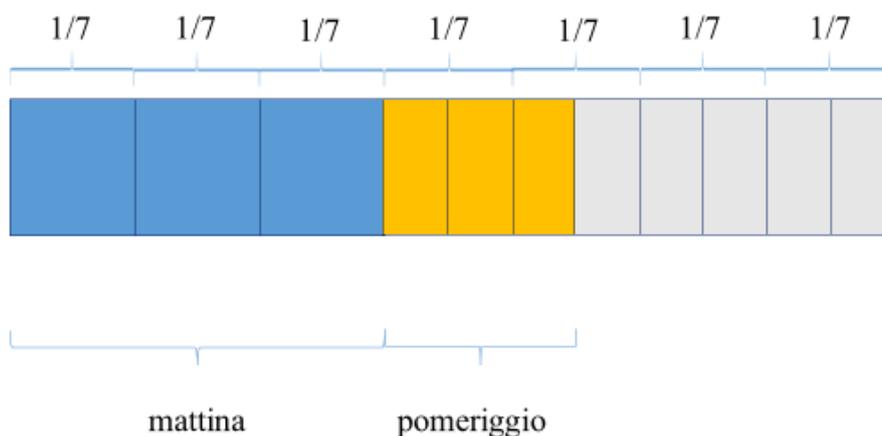
Rappresentiamo con una barra divisa in 7 parti uguali il totale delle torte preparate distinguendo i $\frac{3}{7}$ venduti la mattina dai $\frac{4}{7}$ rimanenti



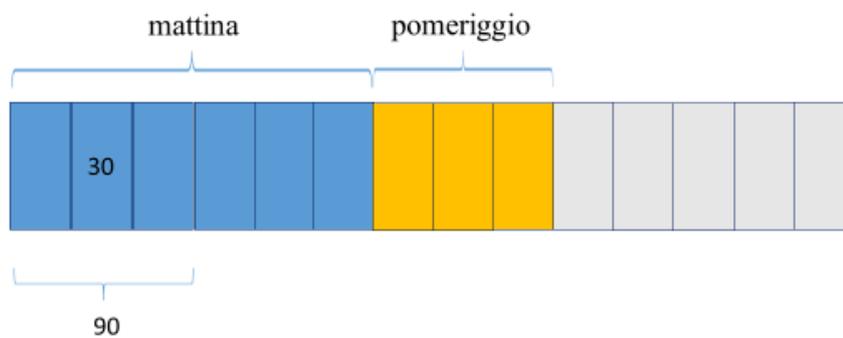
Dividiamo in 2 i rettangoli grigi in modo da dividere in 8 parti uguali le torte che non sono state vendute la mattina



I $\frac{3}{7}$ venduti la mattina e i $\frac{3}{8}$ delle rimanenti venduti il pomeriggio



Dividiamo i rettangoli celesti in due per ottenere rettangoli delle stesse dimensioni



Ci sono 3 rettangoli in più per la mattina, corrispondenti alle 90 torte in più, quindi ogni rettangolo corrisponde a 30 torte. Il totale delle torte è pari a $30 \times 14 = 420$

Bibliografia

- Bruner J. S., *Verso una teoria dell'istruzione*, Armando, Roma, 1995
- Damiano E., *L'azione didattica. Per una teoria dell'insegnamento*, Armando Editore, Roma, 1999
- Ginsburg H., *The development of mathematical thinking*, Academic Press, New York, 1983
- Ginsburg H.P. & Kyoung-Hye Seo, *Mathematics in Children's Thinking*, in *Mathematical Thinking and Learning*, volume 1, 1999
- Ginsburg, H., *Children's Arithmetic: The Learning Process*, Van Nostrand, New York, 1977
- Ministry of Education Singapore, *Mathematics Syllabus Primary One to Five*, 2012
- Moliterni P., *Didattica e scienze motorie, tra mediatori e integrazione*, Armando, Roma, 2013

Sitografia

- http://www.resourceroom.net/math/lda_math_fall98.html
- <http://www.ldonline.org/article/5947>
- <http://lascuola.it/nuovadidattica/it/home/mappe/1382696387986/1390908054991>
- <https://mathsnoproblem.com/en/the-maths/what-is-singapore-maths/>
- <https://mathsnoproblem.com/en/the-maths/teaching-methods/concrete-pictorial-abstract/>
- <http://www.thedailyriff.com/2010/09/singapore-math-demystified-part-2-philosophy.php>
- <http://www.thedailyriff.com/2010/11/singapore-math-demystified-part-3-the-famous-bar-models.php>